1.3 Geometrijske transformacije

Osnovne 2D i 3D geometrijske transformacije, koje se koriste u računarskoj grafici, kao što sutranslacije, skaliranja i rotiranja veoma su bitne za većinu grafičkih aplikacija. Ove transformacije su sastavni deo većine grafičkih programa, kao i mnogih potprograma.

1.3.1 2D transformacije

Korisnik može da **translira** tačku u XY ravni do nove pozicije dodavanjem neke veličine koordinatama tačke. Ako treba tačku sa koordinatama $P(x, y)$ pomeriti za veličinu d_x paralelno X osi i za veličinu d_y paralelno Y osi do nove tačke $P'(x', y')$, onda to može da se definiše izrazima:

$$x' = x + d_x \qquad y' = y + d_y \tag{1.1}$$

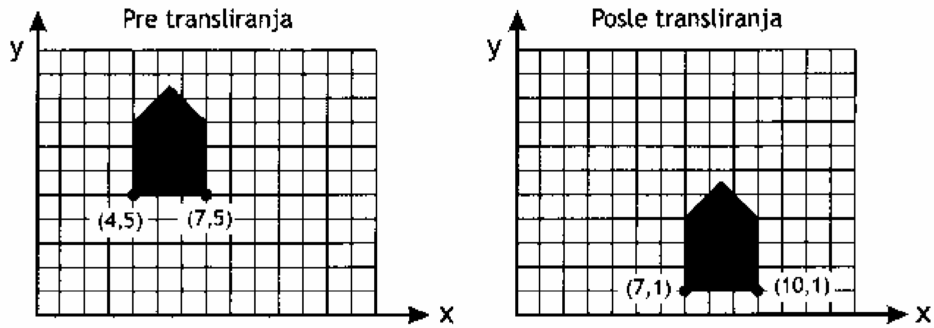
Ako se definišu matrice

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

onda izrazi (1.1) mogu preciznije da se izraze kao:

$$P' = P + T \tag{1.3}$$

Korisnik može da translira ceo objekat primenjujući izraze (1.1) na svaku tačku objekta. Svaka linija objekta je sastavljena od beskonačno mnogo tačaka, onda bi proces translacije trajao izuzetno dugo. Dovoljno je da se transliraju krajnje tačke linija i da se iscrta linija između novih, transliranih tačaka; ovaj princip važi i za skaliranje i rotiranje. Na slici 1.1 prikazano je transliranje kućice za vrednost $(3, -4)$.



Slika 1.1. *Transliranje*

Tačke mogu da budu **skalirane** ili mogu da im se promene veličine (vrednosti) samo po x ili samo po y osi (neproporcionalno) ili i po x i po y osi za istu vrednost (proporcionalno). Promena veličine se postiže množenjem sa s_x duž X ose i množenjem sa s_y duž Y ose:

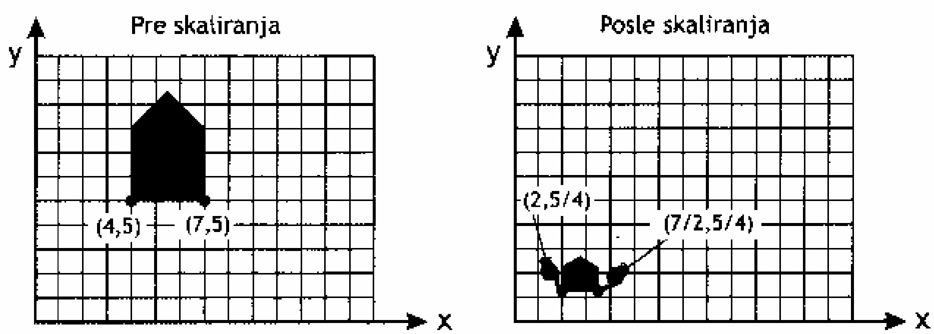
$$x' = s_x\, x \qquad y' = s_y\, y \tag{1.4}$$

U formi matrica izraz postaje:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & d_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad P' = S \cdot P \tag{1.5}$$

gde S predstavlja matricu u izrazu (1.5).

Na slici 1.2 kućica je skalirana vrednošću $\frac{1}{2}$ po X osi i vrednošću $\frac{1}{4}$ po Y osi.



Slika 1.2. *Skaliranje*

Treba napomenuti da se skaliranje obavlja oko koordinatnog početka, što znači da je kuća manja i bliža koordinatnom početku. Ako je faktor skaliranja veći od 1, onda je kućica veća i udaljenija od koordinatnog početka. Proporcije kućice se menjaju ako su faktori skaliranja različiti po osama, tj. $s_x \neq s_y$. Proporcije kućice se ne menjaju ako su faktori skaliranja isti po osama, tj. $s_x = s_y$.

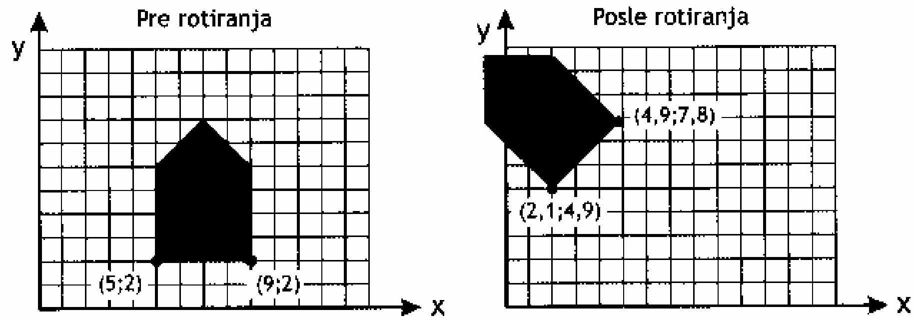
Tačke mogu da se **rotiraju** oko koordinatanog početka za neki ugao θ. Matematička definicija rotiranja je:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \qquad y' = x\sin\theta + y\cos\theta \tag{1.6}$$

U formi matrica izraz postaje:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad P' = R \cdot P \tag{1.7}$$

gde R predstavlja matricu u izrazu (1.7). Na slici 1.3 prikazana je rotacija kućice za 45° oko koordinatnog početka.

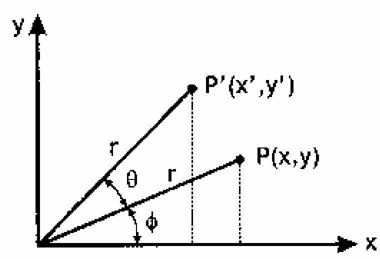


Slika 1.3. *Rotiranje*

Pozitivne vrednosti ugla rotacije se mere u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu, od pozitivnog smera X ose. Za negativne vrednosti (mere se u smeru kretanja kazaljke na satu) mogu jednakosti

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{i} \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

da se iskoriste kako bi se modifikovali izrazi (1.6) i (1.7). Izraz (1.6) je lako dobiti sa slike 1.4, gde se tačka $P(x, y)$ rotiranjem za ugao θ transformiše u tačku $P'(x', y')$.



Slika 1.4. *Jednačina rotiranja*

Zbog toga što se radi o rotiranju oko koordinatnog početka, rastojanje od koordinatnog početka do tačaka P i P′ je isto (na slici 1.16 označeno je sa r). Primenom osnovnih pravila trigonometrije, došlo se do izraza:

$$x = r\cos\phi \quad \text{i} \quad y = r\sin\phi \tag{1.8}$$

i

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\theta+\phi) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\
y' &= r\sin(\theta+\phi) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Zamenom izraza (1.8) u izraz (1.9) dobija se izraz (1.6).

1.3.2 Homogene koordinate i matrice u 2D transformacijama

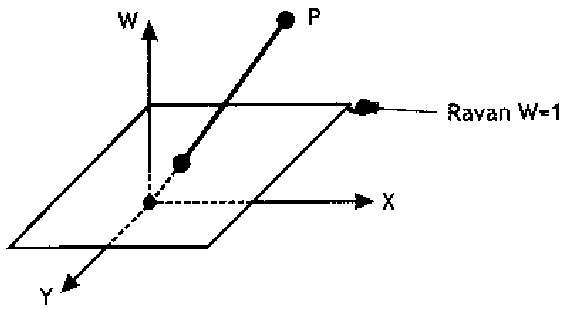
O matričnim prezentacijama transliranja, skaliranja i rotiranja već je bilo reči, i one imaju oblik: za transliranje $P' = P + T$, za skaliranje $P' = S \cdot P$, i za rotiranje $P' = R \cdot P$. Očigledno je da se transliranje tretira drugačije (kao zbir članova) od skaliranja i rotiranja (kao proizvod članova). Da bi se ovo pojednostavilo, ide se na to da se sve tri transformacije tretiraju identično. U tom pogledu bitnu ulogu su imale **homogene koordinate** i tu se sve transformacije tretiraju kao proizvodi. Homogene koordinate su razvijene zbog računarske grafike i najpre su primenjene tu. Razni grafički potprogrami i procesori rade primenjujući homogene koordinate i pomenute transformacije.

U homogenim koordinatama tačke imaju i treću koordinatu. Umesto da tačka bude prikazana parom brojeva (x, y), u homogenim koordinatama tačka je prikazana sa tri broja (x, y, W). U isto vreme, za dve homogene koordinate (x, y, W) i (x', y', W') se kaže da su iste ako se jedna koordinata dobija množenjem druge. Tako koordinate $(2, 3, 5)$ i $(4, 6, 10)$ predstavljaju istu tačku, koja je prikazana sa dva različita kompleta brojeva. Očigledno je da svaka tačka ima neograničen broj prezentacija unutar homogenih koordinata. Važno je napomenuti da barem jedna homogena koordinata mora da bude različita od nule, što znači da **nije dozvoljena tačka (0,0,0)**. Ako je koordinata W različita od 0, onda vrednosti tačaka mogu da se podele sa tom vrednošću i da se dobije jednakost:

$$
(x, y, W) = \left(\frac{x}{W}, \frac{y}{W}, 1\right)
$$

Kada je $W \neq 0$, onda može da se obavi ovo deljenje i brojevi x/W i y/W se zovu *Dekartove koordinate homogenih tačaka*. Tačke sa $W = 0$ se nazivaju *tačke u beskonačnosti* i takve tačke se neće ovde razmatrati.

Uobičajeno je da tri koordinate predstavljaju tačku u 3D prostoru, ali ovde te koordinate predstavljaju tačku u 2D prostoru. Veza je sledeća: ako se uzmu u obzir sve koordinate koje predstavljaju istu tačku, sve koordinate tipa (tx, ty, tW), gde je $t \neq 0$, onda se dobija linija u 3D prostoru. Zaključak je da **svaka homogena tačka predstavlja liniju u 3D prostoru**. Ako se homogenizuju tačke (deljenjem sa W), onda se dobijaju tačke sa koordinatama $(x, y, 1)$. To znači da homogenizovane tačke formiraju ravan koja je definisana jednačinom $W = 1$ u (x, y, W) prostoru. Slika 1.5 prikazuje ovu relaciju. Tačke u bekosnačnosti nisu prikazane u ovoj ravni.



Slika 1.5. *XYW homogeni koordinatni prostor*

Kada se tako predstave homogene tačke, onda transformaciona matrica, koja množi vektor jedne tačke kako bi se dobio vektor druge tačke, mora da bude 3×3. U formi matrice 3×3 za homogene koordinate, izraz transliranja (1.1) postaje:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Transponovana matrica je matrica kod koje redovi i kolone menjaju svoja mesta i kod koje mora da se zadovolji jednakost:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Ako se primene transponovane matrice, onda je:

$$(M \cdot P)^T = P^T \cdot M^T$$

Jednačina (1.10) može da se predstavi u obliku:

$$P' = T\left(d_x, d_y\right) \cdot P \tag{1.11}$$

gde je:

$$T\left(d_x, d_y\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Šta se dešava kada se tačka P translira pomoću $T\left(d_{x_1}, d_{x_2}\right)$ do tačke P', a onda se translira pomoću $T\left(d_{x_2}, d_{y_2}\right)$ do tačke P''? Ono što se intuitivno očekuje je transliranje tipa $T\left(d_{x_1} + d_{x_2}, d_{y_1} + d_{y_2}\right)$. Da bi se ovo potvrdilo, mora da se krene od:

$$\begin{aligned} P' &= T\left(d_{x_1}, d_{y_1}\right) \cdot P & (1.13) \\ P'' &= T\left(d_{x_2}, d_{y_2}\right) \cdot P' & (1.14) \end{aligned}$$

Ako se izraz (1.13) zameni u izrazu (1.14), dobija se:

$$P'' = T\left(d_{x_2}, d_{y_2}\right) \cdot \left[T\left(d_{x_1}, d_{y_1}\right) \cdot P\right] = \left[T\left(d_{x_2}, d_{y_2}\right) \cdot T\left(d_{x_1}, d_{y_1}\right)\right] \cdot P \tag{1.15}$$

Proizvod matrica $T(d_{x_2}, d_{y_2}) \cdot T(d_{x_1}, d_{y_1})$ je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_2} \\ 0 & 1 & d_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_1} \\ 0 & 1 & d_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_1} + d_{x_2} \\ 0 & 1 & d_{y_1} + d_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Očekivano transliranje je zaista tipa $T(d_{x_1} + d_{x_2}, d_{y_1} + d_{y_2})$. Ovaj proizvod matrica ima razne nazive, ali ovde će se koristiti naziv **kompozicija** matrica $T(d_{x_1}, d_{y_1})$ i $T(d_{x_2}, d_{y_2})$.

Slično ovome, jednačina skaliranja (1.4) može da se predstavi u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Definisanjem

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.18}$$

dobija se

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \tag{1.19}$$

Kao što je ranije uspešno transliranje predstavljeno sabiranjem, ovde se očekuje da će se uspešno skaliranje predstaviti množenjem. Ako je poznato:

$$P' = S(s_{x_1}, s_{y_1}) \cdot P \tag{1.20}$$

$$P'' = S(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot P' \tag{1.21}$$

i ako se izraz (1.20) zameni u izrazu (1.21), onda se dobija:

$$P'' = S(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot [S(s_{x_1}, s_{y_1}) \cdot P] = [S(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot S(s_{x_1}, s_{y_1})] \cdot P \tag{1.22}$$

Proizvod matrica $S(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot S(s_{x_1}, s_{y_2})$ je:

$$\begin{bmatrix} s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_1} \cdot s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} \cdot s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

I zaista, uspešno skaliranje je predstavljeno množenjem.

Na kraju, jednačina rotiranja (1.6) može da se predstavi kao:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Definisanjem

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

dobija se

$$P' = R(\theta) \cdot P \tag{1.26}$$

Ako je poznato:

$$\begin{aligned} P' &= R(\theta_1) \cdot P && (1.27) \\ P'' &= R(\theta_2) \cdot P' && (1.28) \end{aligned}$$

i ako se izraz (1.26) zameni u uzraz (1.27), dobija se:

$$\begin{aligned} R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} && (1.29) \end{aligned}$$

Očigledno je iz izraza (1.28) da je:

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) \tag{1.30}$$

U gornjoj levoj 2×2 podmatrici u jednačini (1.25) dva reda mogu da se smatraju vektorima. Da bi vektori bili prikazani, moraju da zadovolje tri uslova:

- da je svaki vektor jedinični;
- da vektori međusobno zaklapaju ugao od $90°$, tj. da su međusobno normalni; i
- da se prvi i drugi vektor rotiraju pomoću $R(\theta)$ kako bi ležali duž pozitivnih smerova x i y osa (ako se poštuju prethodna dva uslova, onda to znači da determinanta podmatrice ima vrednost 1).

Prva dva uslova važe i za kolone podmatrice 2×2. Definisani pravci su zaista oni koji se poklapaju sa pozitivnim smerovima x i y osa kada se vektori zarotiraju. Ovi uslovi omogućavaju dva korisna načina za određivanje matrice rotacije kada se zna šta ta rotacija treba da omogući. Matrica koja ispunjava ove uslove naziva se **specijalna ortogonalna matrica**.

Transformaciona matrica, čija je forma

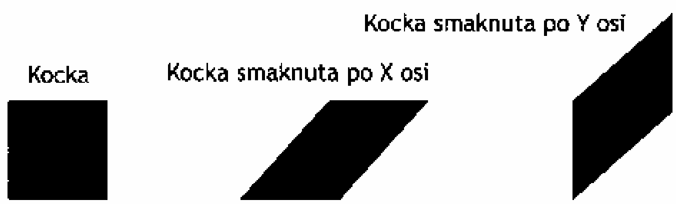
$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

i čija je gornja leva 2×2 podmatrica ortogonalna, sadrži i čuva informacije o uglovima i dužinama. Posle primene ovakve matrice, jedinična površina (jedinični kvadrat) ostaje jedinična površina, samo se menja oblik (ne dobija se ni romb ni pravougaonik). Ovakve transformacije su poznate pod nazivima **transformacije čvrstih tela (solida)** zato što se telo ili objekat transformiše, ali nema izobličenja u bilo kom pravcu. Kombinacijom matrica rotacije i translacije dolazi se do ovakve matrice.

Proizvodi proizvoljnih delova matrica za transliranje, rotiranje i skaliranje nazivaju se i **afine transformacije**, jer se kod njih vodi računa o paralelnosti linija, a ne o dužinama i uglovima. Na slici 1.6 prikazan je rezultat primene rotacije jedinične kocke za 45°, a onda je na tu kocku primenjeno neuniformno skaliranje. Očigledno je sa slike 1.6 da su paralelne linije ostale paralelne, ali uglovi i dužine nemaju više iste vrednosti. Dalje transformacije tipa rotiranja, skaliranja i transliranja ne garantuju paralelnost linija. Veličine $R(\theta)$, $S(s_x, s_y)$ i $T(d_x, d_y)$ su, takođe, afine transformacije.

Slika 1.6. *Afine transformacije*

Još jedan tip primitivne transformacije, **transformacija smicanjem**, je, takođe, afina transformacija. Postoje dve vrste transformacije smicanjem: smicanje duž x ose i smicanje duž y ose. Slika 1.7 prikazuje efekte transformacije smicanjem duž pomenutih osa tekućeg koordinatnog sistema.



Slika 1.7. *Trasnformacija smicanjem*

Ova operacija može da se predstavi matricom

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Član a u matrici smicanja predstavlja proporcionalnu konstantu, tj. koeficijent proporcionalnosti. Na primer, proizvod

$$SH_x \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x + ay & y & 1 \end{bmatrix}^T$$

jasno pokazuje srazmernu promenu u pravcu x ose kao funkciju y, tj. jasno pokazuje smicanje duž x ose. Slično ovome, matrica

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

definiše smicanje duž y ose.

i za njihovo rešavanje treba 2 množenja i 2 sabiranja. Neutralisanje 2 množenja doprinosi brzini rada računara.

Jednačine (1.44) donose aproksimaciju samo vrednosti x' i y', što znači da je greška mala. Svaki put kada se jednačine primenjuju na nove vrednosti x i y, greška postaje veća. Ako se ove jednačine primenjuju mnogo puta, greška postaje ozbiljna i rotiranje slike počinje da liči na kolekciju proizvoljno nacrtanih linija. Ako se posmatraju jednačine (1.44), onda je bolje da se koristi x' umesto x u drugoj jednačini:

$$\begin{aligned} x' &= x - y \sin\theta \\ y' &= x' \sin\theta + y = (x - y\sin\theta)\sin\theta + y = x\sin\theta + y\,(1 - \sin^2\theta) \quad (1.45) \end{aligned}$$

Ovo je bolja transformacija nego što su to jednačine (1.44), jer determinanta odgovarajuće matrice 2×2 ima vrednost 1, što znači da vrednosti transformisane jednačinama (1.45) nisu promenjene.

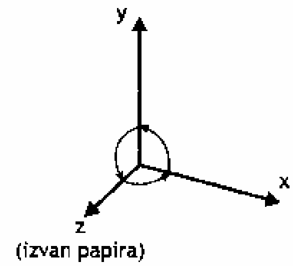
1.3.6 Matrice u 3D transformacijama

Kao što je pokazano, 2D transformacije mogu da budu prikazane 3×3 matricama kada se koriste homogene koordinate, tako i 3D transformacije (ako se koriste homogene koordinate) mogu da budu prikazane 4×4 matricama. Umesto da se prikazuje u formi (x, y, z), tačka će se prikazivati u formi (x, y, z, W). U isto vreme, za dve homogene koordinate (x, y, z, W) i (x', y', z', W') kaže se da su iste ako se jedna koordinata dobija množenjem druge. Tako koordinate $(2, 3, 5, 1)$ i $(4, 6, 10, 2)$ predstavljaju istu tačku, koja je prikazana sa dva različita skupa brojeva. Očigledno je da svaka tačka može da se predstavi na bezbroj načina unutar homogenih koordinata. Pored toga, barem jedna homogena koordinata mora da bude različita od nule, što znači da **nije dozvoljena tačka (0,0,0,0)**. Ako je koordinata W različita od 0, onda vrednosti tačaka mogu da se podele sa tom vrednošću, što daje jednakost:

$$(x, y, z, W) = \left(\frac{x}{W}, \frac{y}{W}, \frac{z}{W}, 1\right).$$

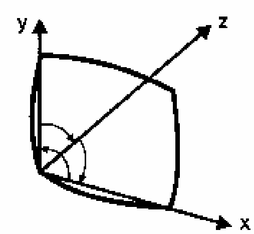
Transformisanje tačaka u ovaj oblik naziva se **homogenizacija**. Sve tačke čije su koordinate $W = 0$ nazivaju se *tačkama u beskonačnosti*. Svaka tačka u 3D prostoru je predstavljena linijom kroz koordinatni početak 4D prostora, a homogenizovana prezentacija ovih tačaka u formi 3D potprostora 4D prostora, predstavljena je jedinstvenom jednačinom $W = 1$.

Kod 3D koordinatnog sistema, koji se ovde koristi, važi pravilo desne ruke, kako je prikazano na slici 1.14. Kako je usvojeno, pozitivno rotiranje u desnom koordinatnom sistemu je takvo da kada korisnik stoji na pozitivnom delu ose i gleda ka koordinatnom početku, rotiranjem za $90°$ u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu, pozitivni smer jedne ose se pretvara u pozitivni smer druge ose. Sledeća pravila proizilaze iz ove konvencije: ako je osa rotacije x osa, onda je pozitivan smer rotacije od ose y ka osi z; ako je osa rotacije y osa, onda je pozitivan smer rotacije od ose z ka osi x; i ako je osa rotacije z osa, onda je pozitivan smer rotacije od ose x ka osi y. Postoji još jedna definicija, koja je odomaćena kod nas. Ako korisnik stegne pesnicu i palac poklopi sa pozitivnim smerom ose, onda prsti stegnute pesnice pokazuju pozitivan smer rotacije oko te ose. Ove dve definicije, u stvari, govore isto.



Slika 1.14. *Desni koordinatni sistem*

Ovde se koriste desni koordinatni sistemi, jer je to standardna matematička konvencija mada mnogi misle da su bolji levi koordinatani sistemi (slika 1.15), jer je kod ovakvih koordinatnih sistema pozitivan smer z ose od korisnika, što je prirodnije. Usvojeno je da je pozitivno rotiranje u levom koordinatnom sistemu takvo da, kada korisnik stoji na pozitivnom delu ose i gleda ka koordinatnom početku, obavlja se rotiranje za 90° u smeru kretanja kazaljke na satu. Ovakva definicija pozitivne rotacije omogućava primenu istih matrica rotacije, bez obzira na to da li se radi o levim ili desnim koordinatnim sistemima. Konverzija levog koordinatnog sistema u desni i desnog koordinatnog sistema u levi biće kasnije objašnjena.



Slika 1.15. *Levi koordinatni sistem*

Transliranje u 3D predstavlja jednostavno proširenje matrice za 2D transformacije:

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

U tom slučaju je:

$$T(d_x, d_y, d_z) \cdot \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x + d_x & y + d_y & z + d_z & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Skaliranje u 3D predstavlja jednostavno proširenje matrice za 2D transformacije:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

U tom slučaju je:

$$S(s_x, s_y, s_z) \cdot \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s_x \cdot x & s_y \cdot y & s_z \cdot z & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Jednačina (1.26), kojom je opisano rotiranje u ravni, predstavlja 3D rotiranje oko z ose, gde je:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

Ovo je lako dokazati. Ako se izvrši rotacija $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ za 90°, što predstavlja jedinični vektor duž x ose, dolazi se do jediničnog vektora $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ duž y ose. Ako se ovo prikaže brojkama, onda proizvod

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

daje očekivani rezultat $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Matrica koja opisuje rotiranje oko x ose je:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

Matrica koja opisuje rotiranje oko y ose je:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

Kolone i redovi u gornjim 3×3 podmatricama matrica $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ i $R_z(\theta)$ predstavljaju normalne jedinične vektore i te podmatrice imaju vrednost determinante 1, što znači da su tri matrice ortogonalne, o čemu je već bilo reči. Sve tri transformacione matrice imaju inverzne matrice. Inverzna T matrica dobija se postavljanjem negativnih vrednosti d_x, d_y i d_z; inverzna S matrica se dobija postavljanjem recipročnih vrednosti s_x, s_y i s_z; inverzne R_x, R_y i R_z matrice dobijaju se postavljanjem negativne vrednosti ugla rotacije.

Neograničen broj matrica transliranja, skaliranja i rotiranja može da se množi. Rezultat tog množenja je proizvod koji uvek ima sledeću formu:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.51}$$

Kao što je to bio slučaj u 2D transformacijama, gornja leva 3×3 podmatrica R prikazuje skupno rotiranje i skaliranje, gde T prikazuje složeno transliranje. Radi poboljšanja efikasnosti neki računarski programi preporučuju transformacije eksplicitno u formi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T, \tag{1.52}$$

gde su R i T podmatrice iz jednačine (1.51).

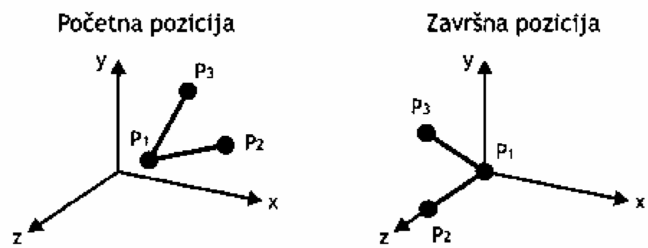
Dvodimenzionalnoj matrici smicanja odgovara 3D matrica smicanja. Smicanje (x, y) je:

$$SH_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

Ako se izraz (1.53) za SH_{xy} primeni na tačku $\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T$, onda se dobija kao odgovor $\begin{bmatrix} x + sh_x \cdot z & y + sh_y \cdot z & z & 1 \end{bmatrix}$. Smicanja u pravcu x i y ose imaju sličnu formu.

1.3.7 Kombinovanje 3D transformacija

Sledi primer komponovanja 3D transformacione matrice. Trebalo bi transformisati duži P_1P_2 i P_2P_3 na slici 1.16, od početne do završne pozicije. Najpre treba tačku P_1 translirati u koordinatni početak, duž P_1P_2 treba da leži na pozitivnom delu z ose i duž P_1P_3 treba da leži u yz ravni, u delu koji obrazuju pozitivni smerovi osa y i z. Dužine duži nisu bitne za ove transformacije.



Slika 1.16. *Transformisanje tačaka od početnog do krajnjeg položaja*

Postoje dva načina da se ove transformacije predstave. Prvi način je komponovanje primitivnih transformacija T, R_x, R_y i R_z. Ovaj način je duži, ali se lako ilustruje i razume. Drugi način je korišćenje osobina ortogonalnih matrica, što je brže, ali i kompleksnije.

Rad sa primitivnim transformacijama je jednostavniji i sastoji se od razbijanja problema na jednostavnije faze. U ovom slučaju željena transformacija može da se odradi u četiri koraka: 1) transliranje tačke P_1 u koordinatni početak; 2) rotiranje oko y ose kako bi duž P_1P_2 ležala u yz ravni; 3) rotiranje oko x ose kako bi duž P_1P_2 legla na pozitivan deo z ose; i 4) rotiranje oko z ose kako bi duž P_1P_3 legla u specificirani